

Einführung in die Digitale Signalverarbeitung

Kognitive Systeme, 8. & 10. Mai 2017

Signal als Funktion:

- Akustik $f(t)$
- Bilder $f(x,y)$
- Energie als Funktion der Zeit oder des Raumes
- Energie: Lautstärke, Helligkeit, Grauwertintensität
- Farbe, Stereo, Bildsequenzen

Eigenschaften:

- Hinlänglich glatt
- $0 \leq f(x, y) < \infty$ (wertbeschränkt)

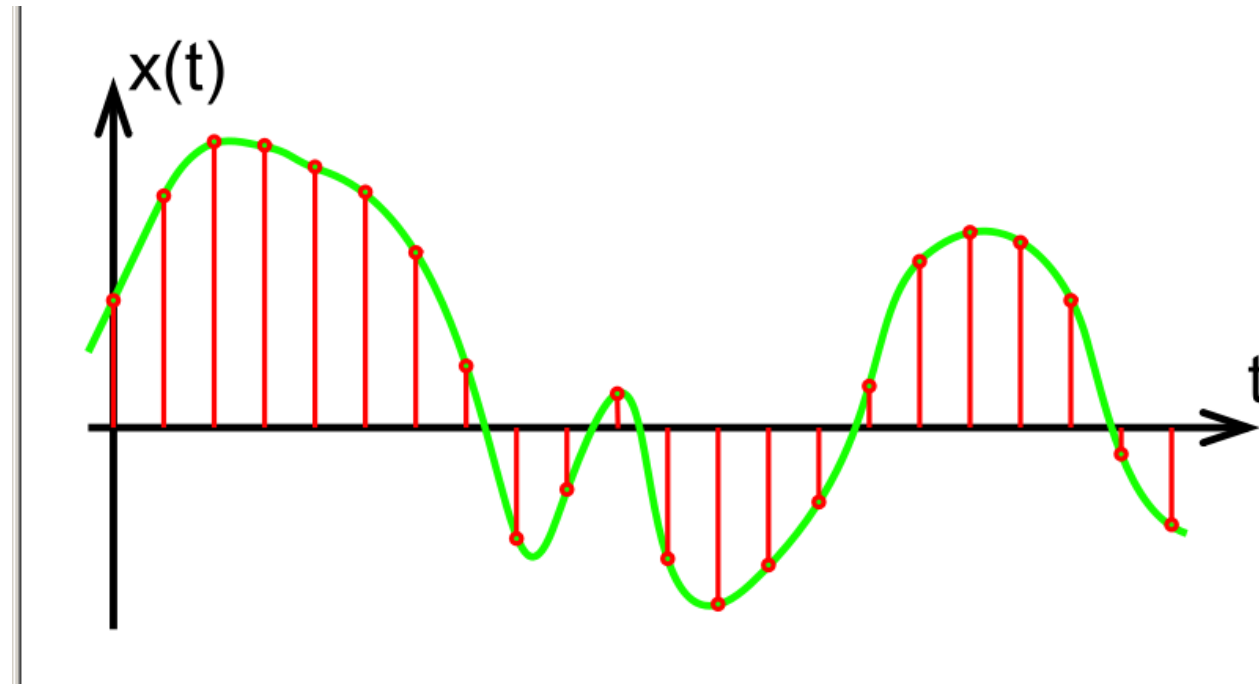
Abtastung und Sampling

- Man messe das Signal $f(x)$ an verschiedenen Punkten x
- Punkte x , in diskreten Abständen, an meist äquidistanten Stellen eines Abtastrasters
- Akustik: $G = f(0), f(\Delta), f(2\Delta), \dots, f((N-1)\Delta)$
- Bild:

$$G = \begin{bmatrix} f(0,0) & \text{L} & f(0,N-1) \\ \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ f(N-1,0) & \text{L} & f(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

- Meist $N=2^m$
- Bild: Rechtwinklig, schiefwinklig, sechseckige Raster
- Wie oft? Wie grosses Raster? --> Sampling Theorem

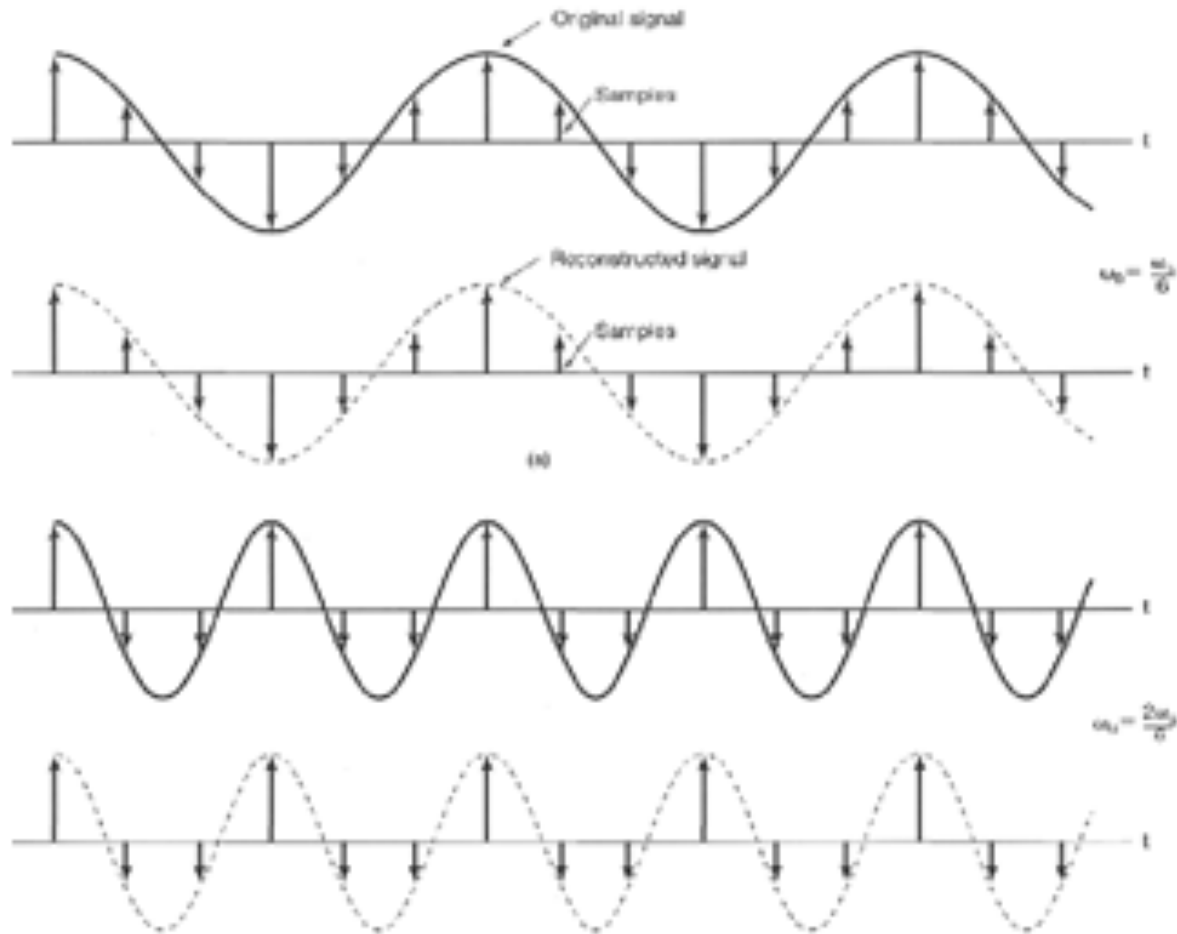
Abtasten - Sampling



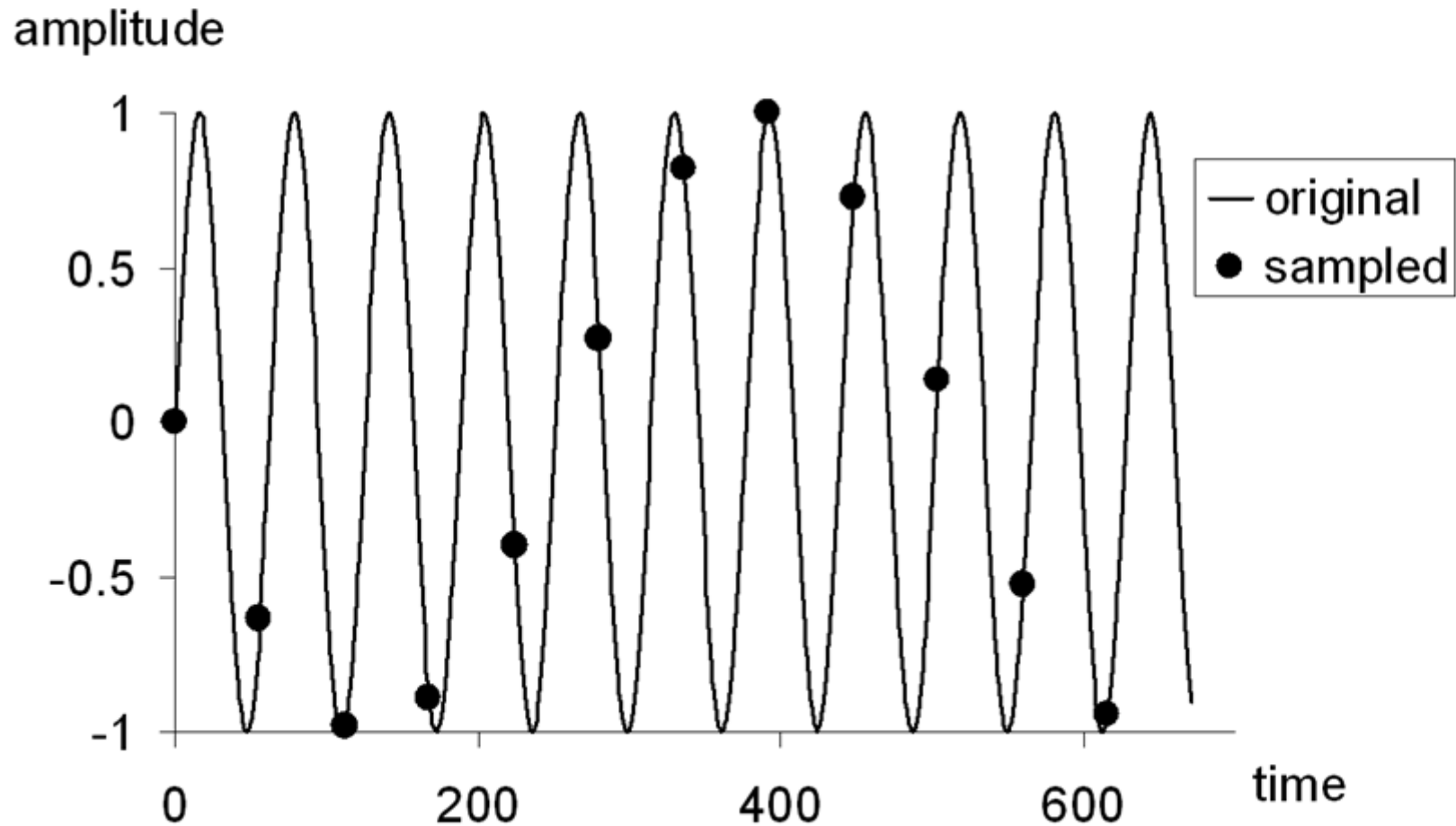
Digitalisierung von Signalen

- CD
- Video (DV, DVD)
- Digitaler Rundfunk (DAB)
- ISDN
- Vorteile:
 - Qualität (Bits sind Bits, verlustfreie Übertragung)
 - Kompression
 - Mehrfacher Nutzen von Kommunikationskanälen (Time Division Multiple Access)

Abtasten / Sampling und Rekonstruktion



Sampling - Aliasing



Aliasing Beispiele

Musik

 44 kHz

 4 kHz

 4 kHz Anti-Aliased

Sprache

 16 kHz (Original)

 8 kHz

 4 kHz

 3 kHz

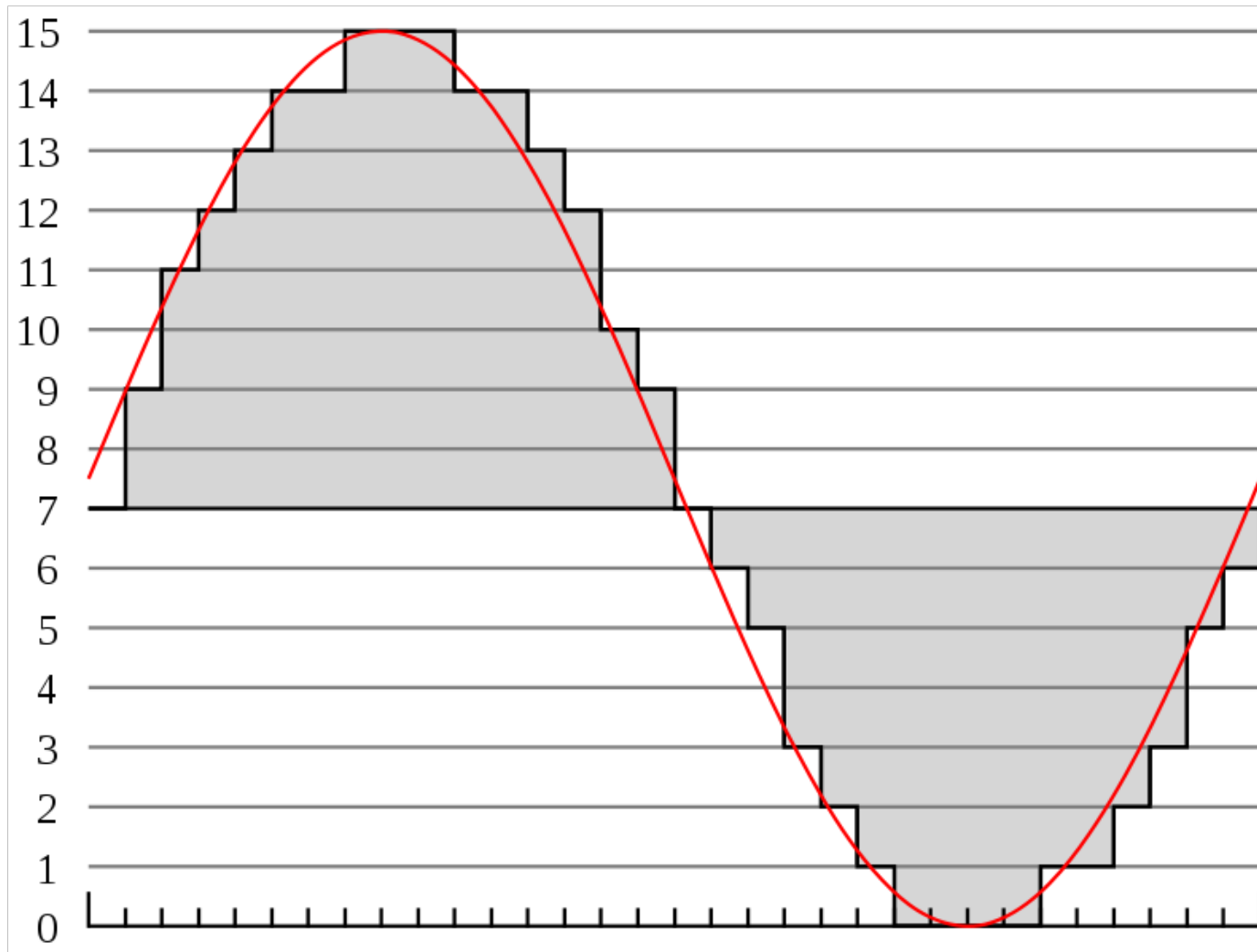
 2 kHz

Beheben von Aliasing

Möglichkeiten zum Beheben von Aliasing:

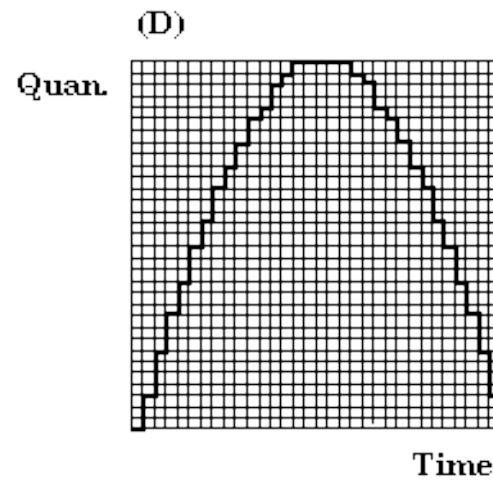
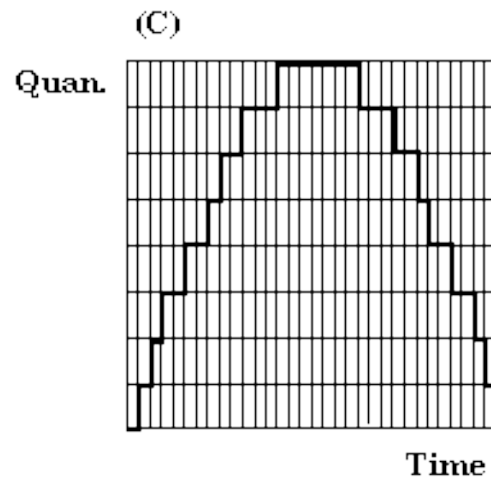
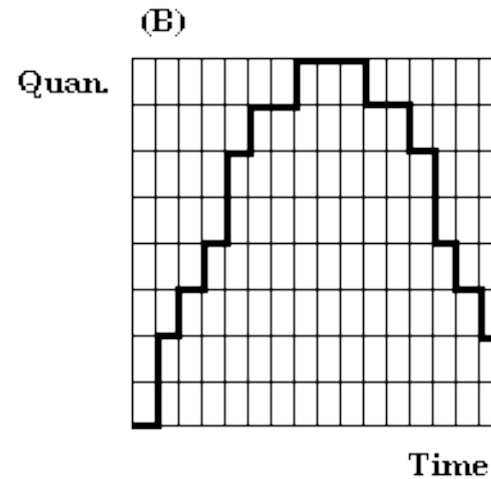
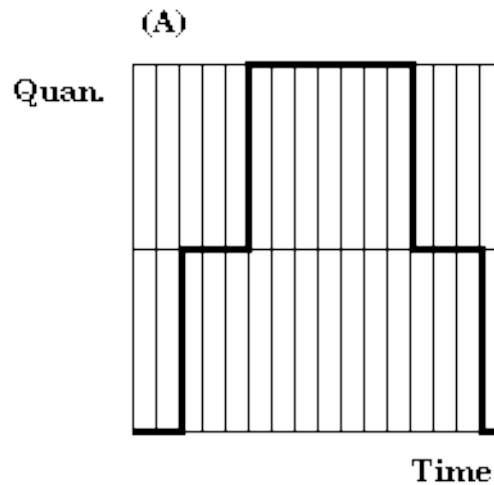
- Samplefrequenz erhöhen
Nachteil: erhöhtes Datenaufkommen
- Bandbegrenzen des Originalsignals durch Tiefpassfilter (Anti-Aliasing Filter)
Nachteil: Informationsverlust

Quantisierung



- Im Computer müssen Messwerte quantisiert werden
- Die Anzahl der Quantisierungsstufen bestimmt Auflösung
- Feinere Auflösung
 - Bessere Qualität
 - Mehr Speicher
- Dynamische Abtastung
 - Starke Übergänge: Fein rastern - grob quantisieren
 - Schwache Übergänge: Grob rastern - fein quantisieren

Quantisierung



Quantization - Bilder

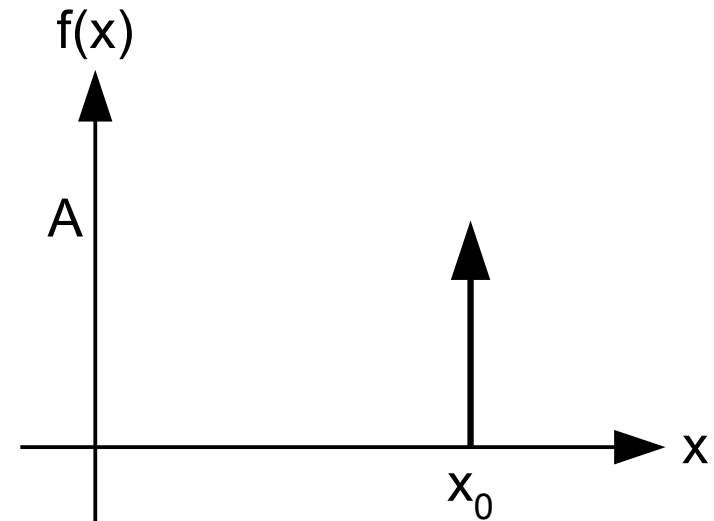


Diracfunktion (Impuls)

- Definition:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta(x - x_0) dx = 1$$

- Hat Fläche 1, an einer beliebig kleinen Umgebung
- $A\delta(x - x_0)$ Impuls mit Stärke A an der Stelle $x=x_0$



- Definition:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (\text{kontinuierlich})$$

$$(f * g)[i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f[i - j]g[j] \quad (\text{diskret})$$

- Faltung der Zeitfunktionen: $F(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
- Multiplikation der Zeitfunktionen: $F(f_1(t) \cdot f_2(t)) = F_1(\omega) * F_2(\omega)$
- Faltung zweier Funktionen entspricht dem Filtern eines Signals.

Beispiel Faltung

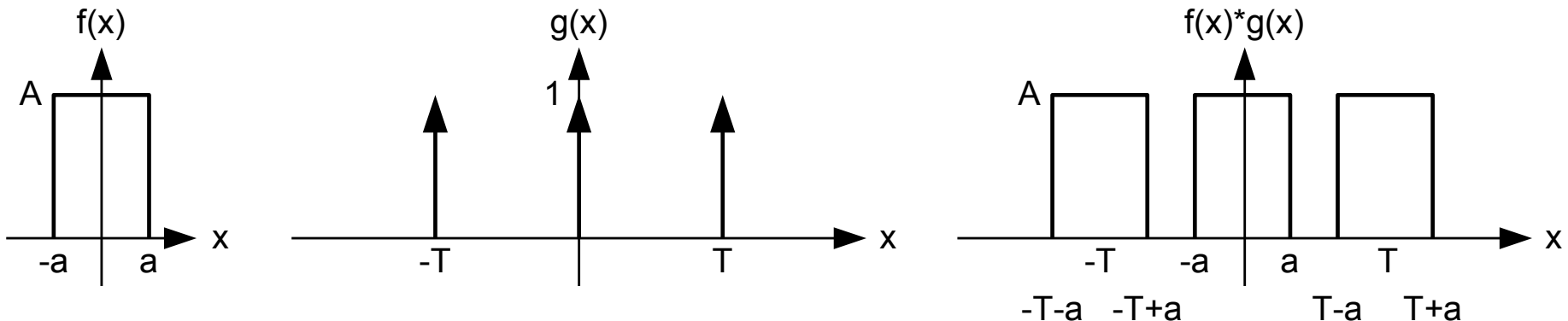
- Gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} A & : -a \leq x \leq a \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) = \delta(x - T) + \delta(x) + \delta(x + T)$$

- Ergebnis:

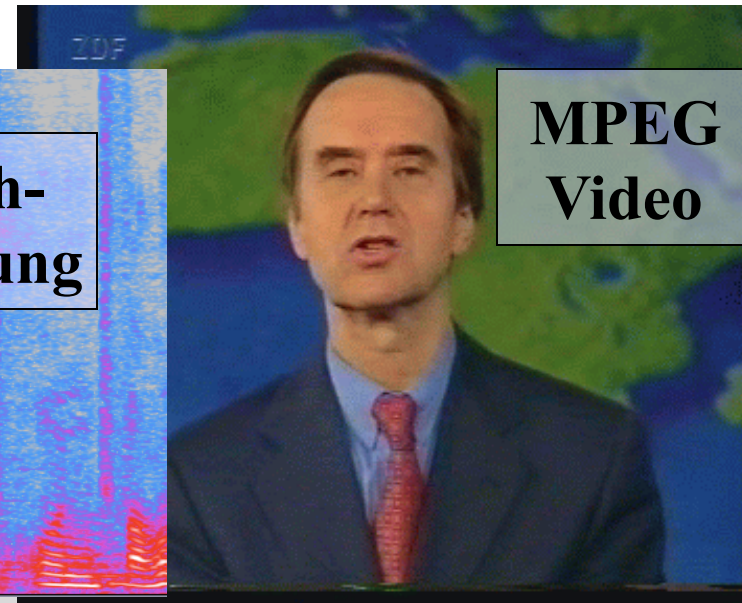
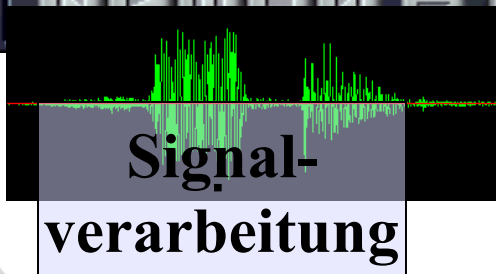
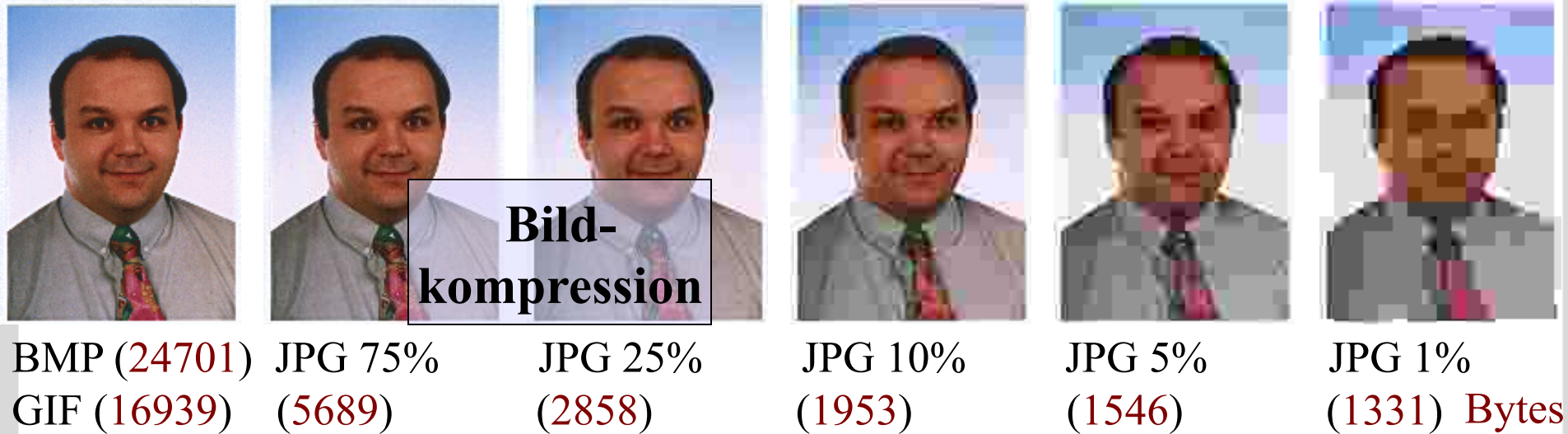
$$f(x) * g(x) = f(x - T) + f(x) + f(x + T)$$



Idee der Fourier Transformation und Fourier-Reihen

- Zerlegung eines Signals in eine Summe von komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen
- Unterschiedliche Frequenzen
- Darstellung: Amplituden und Phasen als Funktion von Frequenz

Anwendungen der Fouriertransformation



Fourier Reihenzerlegung

- Periodisches Signal

- Definition:
$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{-i\pi \frac{k}{L} x} dx$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\pi \frac{k}{L} x}$$

- Komplexe Schreibweise $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- Parameter: Amplitude, Phase, Frequenz (Periode)

Fourierreihe für Rechteckfunktion I

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

- Beispiel für Fourierreihenentwicklung:
- Für $f(x) = \text{sign}(\sin(x))$ gilt

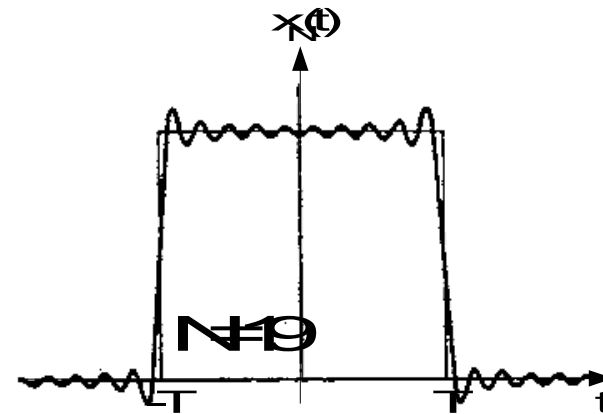
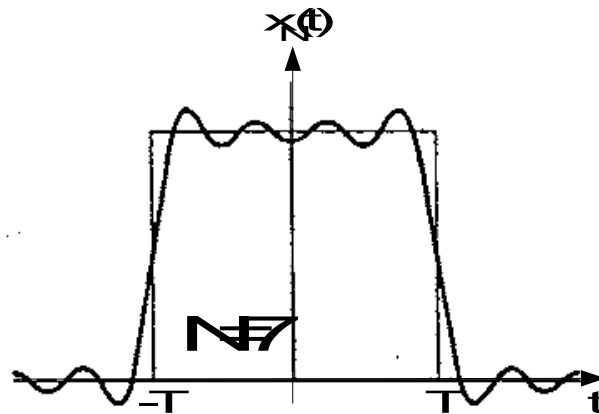
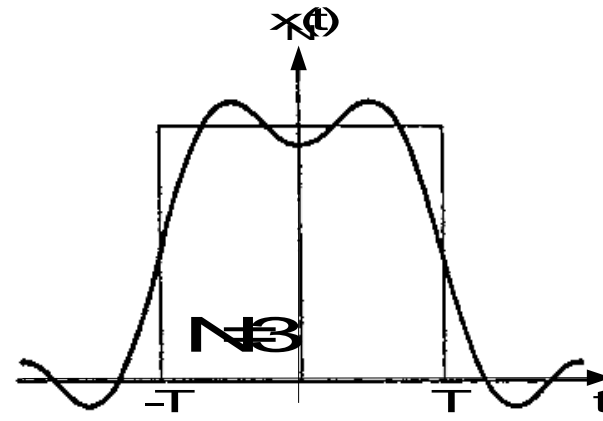
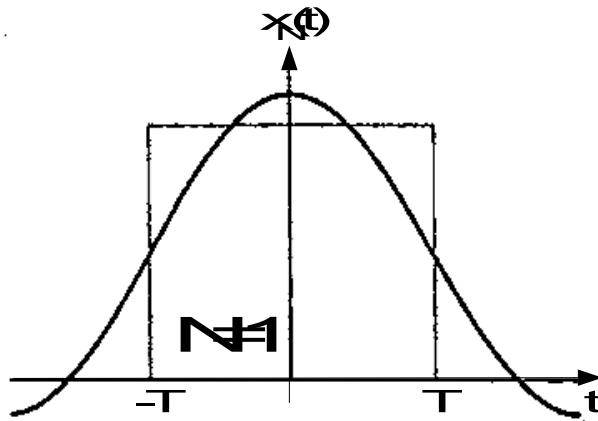
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

- und somit

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

Fourierreihe für Rechteckfunktion II



- Anmerkung:
 - Annahme: Signal unendlich, periodisch
 - Praxis: nicht unendlich periodisch
 - Allgemeinere Formulierung? Aperiodische oder Endliche Signale?
- Fourier Transformation

- Fouriertransformation: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
- Inverse Fouriertransformation: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega$
- Betrag des Fourierspektrum: $|F(\omega)| = \sqrt{\Re(F(\omega))^2 + \Im(F(\omega))^2}$
- Phase des Spektrums: $\varphi(F(\omega)) = \arctan \frac{\Im(F(\omega))}{\Re(F(\omega))}$

- Linearität:

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2)$$

- Differentiation:

$$F(f^{(n)}) = (i\omega)^n F(f)$$

- Verschiebung:

$$F(f(t - T)) = e^{-i\omega T} F(f) \quad (\text{Zeit})$$

$$F(e^{-i\omega_0 t} f(t)) = F(\omega - \omega_0) \quad (\text{Frequenz})$$

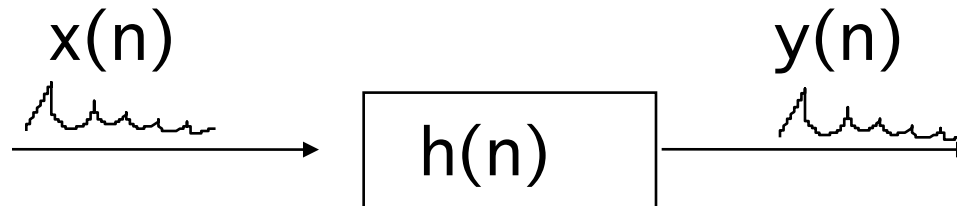
- Definition:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \quad (\text{kontinuierlich})$$

$$(f * g)[i] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f[i - j]g[j] \quad (\text{diskret})$$

- Faltung der Zeitfunktionen: $F(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
- Multiplikation der Zeitfunktionen: $F(f_1(t) \cdot f_2(t)) = F_1(\omega) * F_2(\omega)$
- Faltung zweier Funktionen entspricht dem Filtern eines Signals.

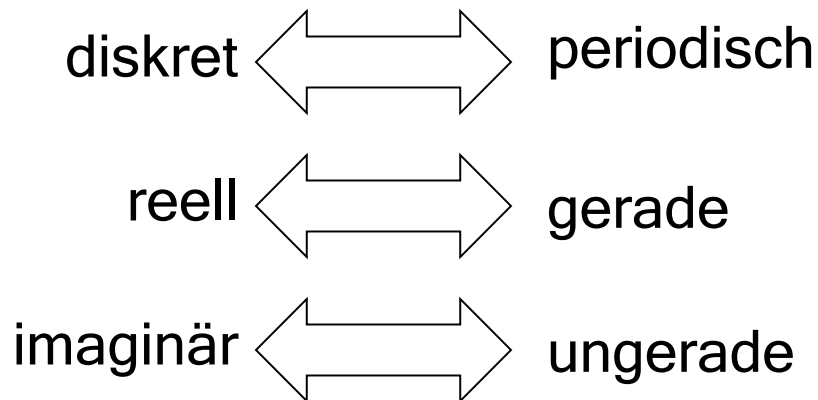
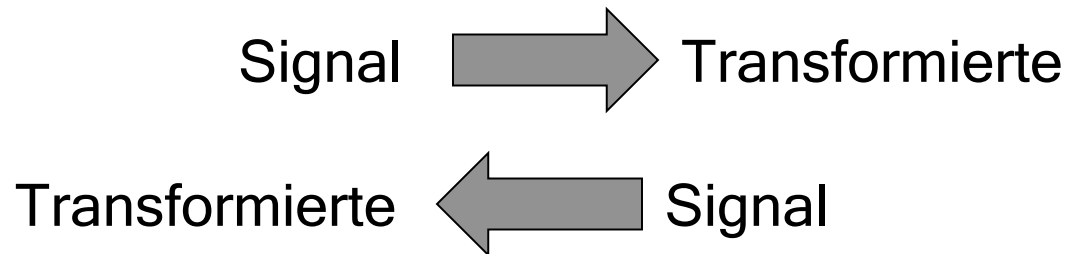
Convolution



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n - k)$$

$$Y(\omega) = F(x(n) * h(n)) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Zusammenhänge



- Sinusfunktion:

$$f(x) = a \sin(\omega_0 x) \Leftrightarrow F(\omega) = ia\pi\delta(\omega + \omega_0) - ia\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

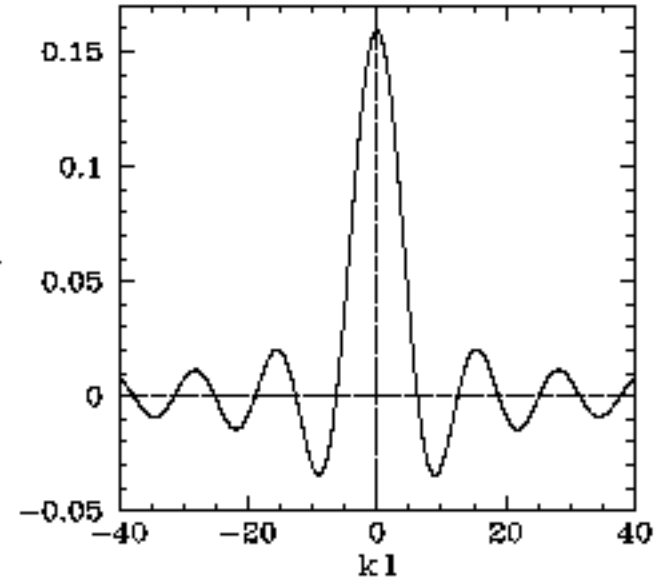
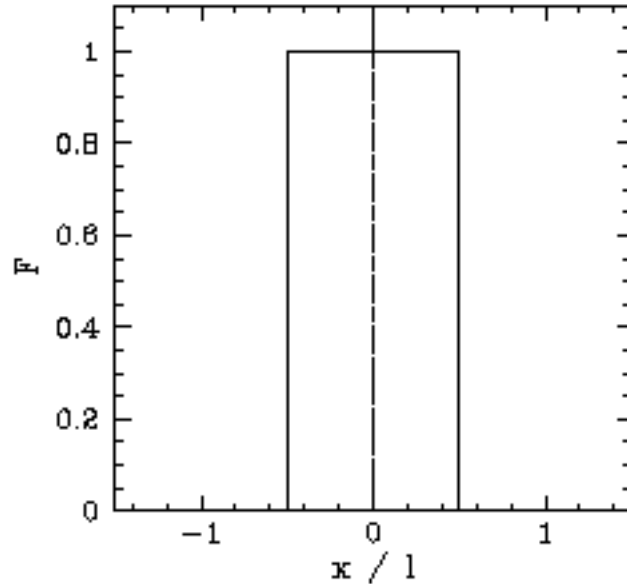
- Cosinusfunktion:

$$f(x) = a \cos(\omega_0 x) \Leftrightarrow F(\omega) = a\pi\delta(\omega + \omega_0) + a\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

(Sinus-und cosinusförmige Signale werden im Frequenzbereich als zwei Impulse wiedergegeben.)

Typische Fouriertransformationen I

- Hut-Funktion:



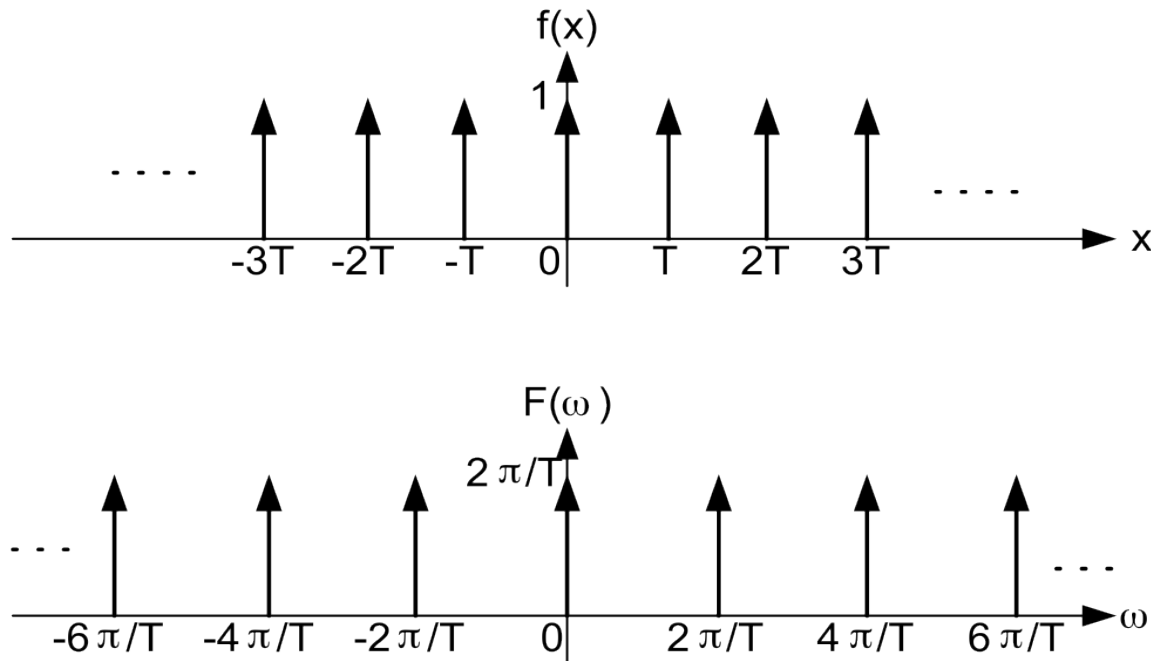
- Endliches Signal kann zu unendlichem Spektrum führen. Approximation nötig!
- Je stärker die Übergänge im Signal, desto höher die Frequenz der Komponenten, um so breiter das Spektrum.

- Problem: Beide kontinuierlich, schwer digital darzustellen
 - Diskrete Zeit (discrete time) Fouriertransformation:
 - Eingabe: Diskret, aperiodisch
 - Ergebnis: Periodisch, kontinuierlich
 - Diskrete Fouriertransformation (DFT, FFT)
 - Eingabe: Periodisch, diskret
 - Ergebnis: Diskret, periodisch
 - Spezialfall der Z-Transformation
 - Periodische Eingabe? Man schneidet ein Fenster aus und tut so, als ob es so periodisch unendlich fortgesetzt wird.

Typische Fouriertransformationen II

- Impulszug:

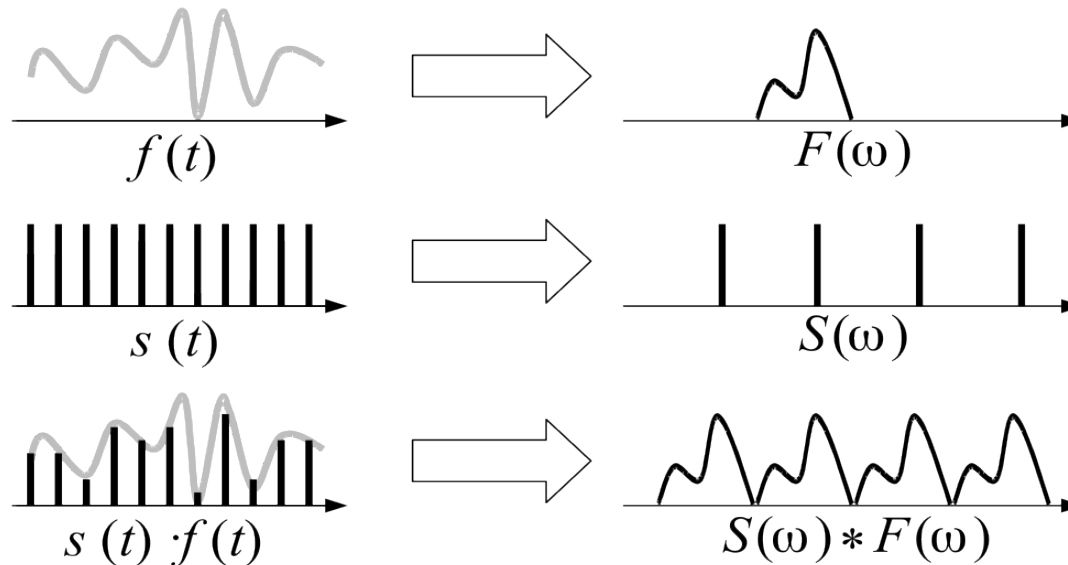
$$f(x) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \delta(x - vT) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{v2\pi}{T}\right)$$



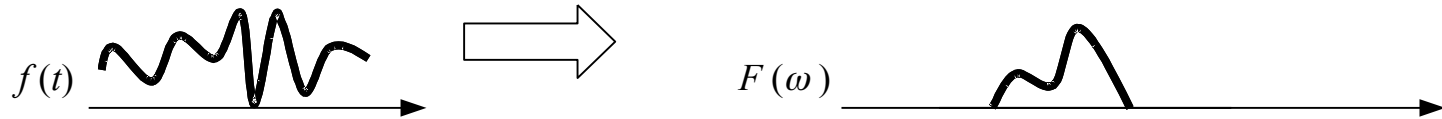
Von kontinuierlich nach diskret

Abtasten (sampling) von $f(t)$ mit der Abtastperiode T bedeutet

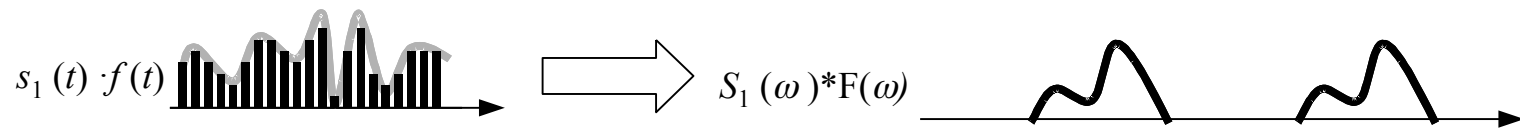
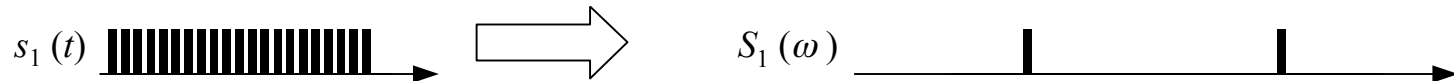
Multiplikation von $f(t)$ mit der unendlichen Impulsfolge $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n \cdot T)$



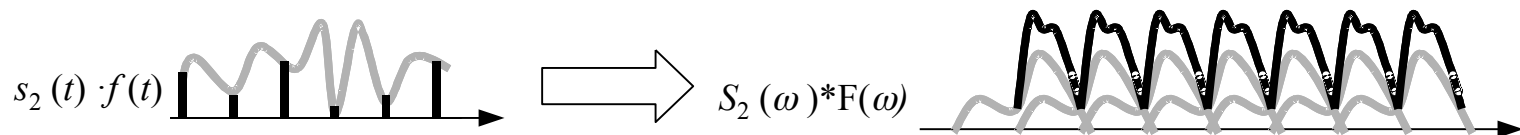
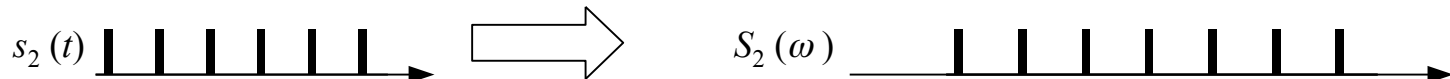
Aliasing



- Kein Aliasing



- Aliasing



Abtast/Sampling Theorem

$$\Delta x < \frac{1}{2\omega}$$

- Die Samplingfrequenz muss echt größer sein als das 2-fache der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz (Cutoff-frequency).
- Um Aliasing zu vermeiden muss das Abtasttheorem eingehalten werden.
- Ist das Abtasttheorem eingehalten kann ein Signal durch inverse Fouriertransformation vollständig rekonstruiert werden.

Abtasten in der Praxis

- Abtasten nur in endlichem Intervall möglich
- Spektrum Lokal (in kleinem Intervall interessant)
 - Multiplikation des Signals mit Fensterfunktion
 - Faltung des Fensterspektrums mit Signalspektrum
 - Ungenauigkeiten, genaue Rekonstruktion nicht mehr möglich
- Ausnahme: Signal ist periodisch und bandbegrenzt

Beheben von Aliasing

Möglichkeiten zum Beheben von Aliasing:

- Samplefrequenz erhöhen
Nachteil: erhöhtes Datenaufkommen
- Bandbegrenzen des Originalsignals durch Tiefpassfilter (Anti-Aliasing Filter)
Nachteil: Informationsverlust

Aliasing Beispiele

Musik

 44 kHz

 4 kHz

 4 kHz Anti-Aliased

Sprache

 16 kHz (Original)

 8 kHz

 4 kHz

 3 kHz

 2 kHz

- Eindimensionale Kreuzkorrelation:

$$R_{f,g}(m) = \sum_i f(i)g(i - m)$$

- Zweidimensionale Kreuzkorrelation:

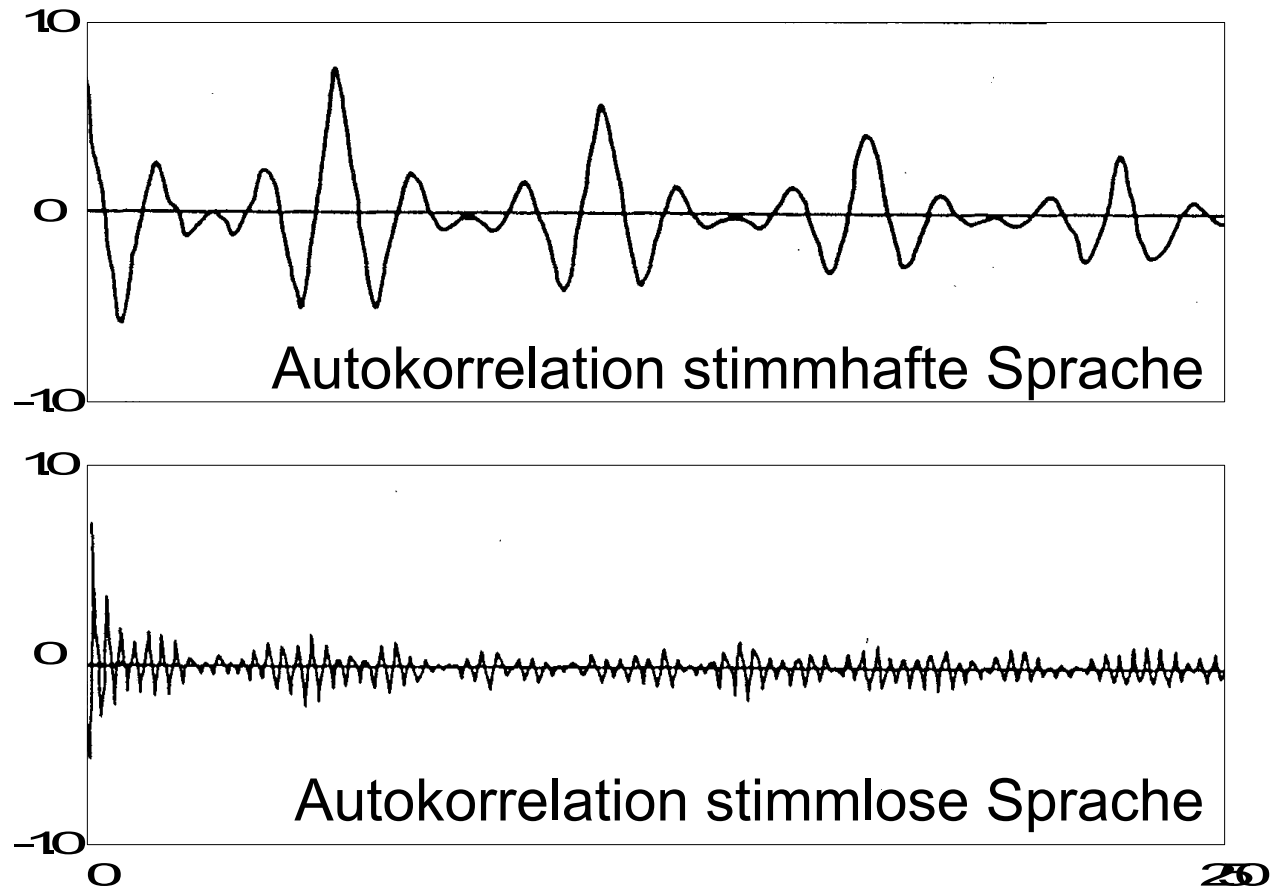
$$R_{f,g}(m, n) = \sum_i \sum_j f(i, j)g(i - m, j - n)$$

- Autokorrelation = Kreuzkorrelation mit sich selbst:

$$A(m) = \sum_i f(i)f(i - m)$$

$$A(m, n) = \sum_i \sum_j f(i, j)f(i - m, j - n)$$

Beispiel Autokorrelation



Beispiel Zweidimensionale Auto- und Kreuzkorrelation

		0	1	0		
		1	1	1		
		0	1	0		

		1	0	1		
		0	1	0		
		1	0	1		

Auto-
korrelation



0	1	0
1	1	1
0	1	0

Kreuz-
korrelation



	0	0	1	0	0	
	0	2	2	2	0	
	1	2	5	2	1	
	0	2	2	2	0	
	0	0	1	0	0	

	0	1	0	1	0	
	1	1	3	1	1	
	0	3	1	3	0	
	1	1	3	1	1	
	0	1	0	1	0	

Schablonenanpassung (Template Matching)

- Eine einfache Form der Klassifikation
- Ziel: Ein Muster zu erkennen das einem abgespeicherten Beispiel ähnlich ist.
- Maß der Übereinstimmung ist der Absolutbetrag zwischen Muster und Schablone (zentriert an (m,n)):

$$M_{f,g}(m,n) = \sum_i \sum_j |f(i,j)g(i-m,j-n)|$$

- Abstand $E(m,n)$ ist definiert als Quadrat der Kreuzkorrelation:

$$E_{f,g}(m,n) = \left(\sum_i \sum_j f(i,j)g(i-m,j-n) \right)^2$$

Beispiel Schablonenanpassung

A B C D E F G H I J K L M N O
P Q R S T U V W X Y Z

